**СЕМ, лекция 2**

(2020-10-08)

**Дефиниция (Вероятност).** Нека e -алгебра върху множество от елементарни

събития . Toгава изображението ℙ : 𝒜 → [0,1

изпълнени следните три условия:

се нарича вероятност, ако са

**1)** ℙ(Ω) =

1. Ако *A*

и *Ac* = Ω∖*A*, то ℙ(*Ac*) = 1 − ℙ(*A*)

∞ ∞

1. Ако *Ai* ∈ 𝒜, ∀*i* ≥ 1 и *Ai* ∩ *Aj* = Ø за *i* ≠ *j*, то ℙ (⋃ *Ak*) = ∑ ℙ (*Ak*)

*k*=1 *k*=1

(Ако имаме редица от непресичащи се събития, то вероятността поне едно от тях да се случи (операцията „или“) е сумата на индивидуалните вероятности. В този смисъл вероятността е мярка, тъй като това е най-класическото свойство на мярката)

**Следствие.** Нека имаме ℙ : 𝒜 → [0,1

е вероятност. Тогава са изпълнени

следните свойства *A*, *B* ∈ 𝒜)

# ℙ(Ø) = 0

* 1. Ако *B* ⊆ *A*, то ℙ(*B*) = ℙ(*A* ∩ *B*) + ℙ(*Ac* ∩ *B*), *A*
  2. Ако *A* ⊆ *B*, то ℙ(*A*) ≤ ℙ(*B*) (Монотонност)

**d)** ℙ(*A* ∪ *B*) = ℙ(*A*) + ℙ(*B*) − ℙ∞(*A* ∩ *B*)

1. *A*1 ⊇ *A*2 ⊇ *A*3 ⊇ . . . , то ℙ(⋂ *Aj*) = lim ℙ(*An*) (Непрекъснатост)

*j*=1

∞

*n*→∞

∞

1. Ако имаме *Ai*, *i* ≥ 1, то ℙ(⋃ *Ai*) ≤ ∑ ℙ (*Ai*). Това свойство е изпълнено и

*i*=1

*i*=1 *n n*

за всяко крайно обединение от събития: ℙ(⋃ *Ai*) ≤ ∑ ℙ (*Ai*), за някое

*i*=1

*n* .

*i*=1

**Доказателство.**

1. Ø = Ω*c* ⇒2)
2. *A*, *B* ∈ 𝒜

# ℙ(Ø) = 1 − ℙ(Ω) = 0

*B A*

*Ac* ∩ *B A* ∩ *B*

⇒ *B* = (*A* ∩ *B*) ∪ (*Ac* ∩ *B*) ⇒ ℙ(*B*) =3) ℙ(*A* ∩ *B*) + ℙ(*Ac* ∩ *B*)

∩ *Ac*

*B*

*A*

1. *B* = *A* ∪ (*B* ∩ *Ac*)

ℙ(*B*) =3) ℙ(*A*) + ℙ(*B* ∩ *Ac*) ≥ ℙ(*A*)

*A*

*B*

*A* ∩ *Bc A* ∩ *B B* ∩ *Ac*

**d)** *A* ∪ *B* = (*A* ∩ *Bc*) ∪ (*A* ∩ *B*) ∪ (*B* ∩ *Ac*)

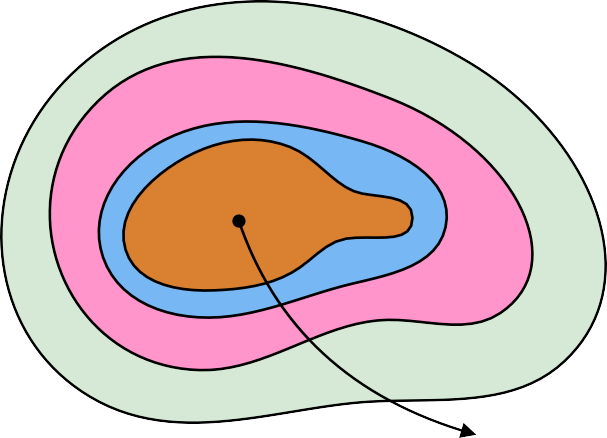
ℙ(*A* ∪ *B*) =3) ℙ(*A* ∩ *Bc*) + ℙ(*A* ∩ *B*) + ℙ(*B* ∩ *Ac*) =

b=) ℙ(*A*) + ℙ(*B* ∩ *Ac*) + ℙ(*A* ∩ *B*) − ℙ(*A* ∩ *B*) =

добавяме и изваждаме

b=) ℙ(*A*) + ℙ(*B*) − ℙ(*A* ∩ *B*)

**e)** *A*1 ⊇ *A*2 ⊇ *A*3 ⊇ . . .



*A*1

*A*3

*A*2

*A*

∞

*A* = ⋂ *Aj* е множеството, което

*j*=1

принадлежи на всяко едно от събитията.

Под *A*∖*B* разбираме множеството без

множеството , т.е. *A*∖*B* = *A* ∩ *Bc*.

Цел: Да докажем, че ℙ(*A*) = lim ℙ(*An*).

∞ 3)

*n*→∞

*A*1 = ⋃ *Aj*∖*Aj*+1 ∪ *A* ⇒

*j*=1 ∞ ∞

1 ≥ ℙ(*A*1) = ∑ ℙ(*Aj*∖*Aj*+1) + ℙ(*A*) ⇒ ∑ ℙ(*Aj*∖*Aj*+1) < ∞ е сходящ ред.

*j*=1 ∞ *j*=1 ∞

От друга страна, *An* = ⋃ *Aj*∖*Aj*+1 ∪ *A* ⇒ ℙ(*An*) = ∑ ℙ(*Aj*∖*Aj*+1) + ℙ(*A*).

*j*=*n*

∞ *j*=*n*

Граничен преход: lim ℙ(*An*) = ℙ(*A*) + lim ∑ ℙ(*Aj*∖*Aj*+1) = ℙ(*A*).

*n*→∞

∞ ∞

*n*→∞ *j*=*n*

=0

**f)** ℙ(⋃ *Aj*) ≤ ∑ ℙ(*Aj*)

*j*=1

∞

*j*=1 *n*

( ∑ ℙ(*Aj*) ≥ ℙ(⋃ *Aj*), това може да се докаже по индукция, използвайки

*j*=1

д)

*j*=1

ℙ(*A* ∪ *B*) ≤ ℙ(*A*) + ℙ(*B*), но ние ще докажем директно по-общия случай за

безкраен брой множества.)

*A*1 = *B*1

*A*1

*A*2

*B*1

*B*2

*B*3

*A*3

*B*2 = *A*2∖*A*1 = *A*2 ∩ *Ac*

1

*B*3 = *A*3∖(*A*1 ∪ *A*2)

*n*−1

*Bn* = *An*∖(⋃ *Aj*) ⊆ *An*

*j*=1

*Bi* ∩ *Bj* = Ø, *i* ≠ *j*

От друга страна имаме, че:

∞

ℙ *B* =3)

∞ c)

ℙ(*B* ), но *B* ⊆ *A*

*B* ) ≤ ℙ(*A* )

(⋃ *j*) *j*=1

∑ *j*

*j*=1

*j j* ⇒ ℙ( *j*

*j* . Т.е. е в сила

∞

ℙ *B* =3)

∞ ∞

ℙ(*B* ) ≤

∞ ∞

ℙ(*A* ) *B* = *A*

(⋃ *j*) *j*=1

∑

*j*=1

*j* ∑

*j*=1

*j* . Остана да докажем, че ⋃ *j*

*j*=1

⋃

*j*=1

*j* (тъй

като, ако това е изпълнено, то ще може да го заместим в предходното равенство и да получим желания резултат).

∞ ∞ ∞ ∞

⋃ *Bj* ⊆ ⋃ *Aj* е очевидно, тъй като *Bj* ⊆ *Aj* , *j*. Защо, обаче ⋃ *Bj* ⊇ ⋃ *Aj* ?

*j*=1

*j*=1

∞

*j*=1

*j*=1

Нека вземем елемент *ω* ∈ ⋃ *Aj* ⇒ *ω* ∈ *Ak* за някое *k*. Да вземем

*j*=1

*k* = min{*j* ≥ 1 : *ω* ∈ *Aj*} (най-малкия номер *k* на множество, в което елемента

принадлежи – знаем, че със сигурност ще има поне едно такова множество)

*k*−1 *k*−1 ∞

*Bk* = *Ak*∖⋃ *Aj*, но *ω* ∉ ⋃ *Aj* ⇒ *ω* ∈ *Bk* ⇒ *ω* ∈ ⋃ *Bj* ⇒

*j*=1

*j*=1

*j*=1

∞

# ⇒ ℙ *A*

∞

# = ℙ *B*

∞

# =3) ℙ *B*

∞

≤ ℙ(*A* )

(⋃ *j*) *j*=1

докажем.

(⋃ *j*) *j*=1

∑

*j*=1

( *j*)

∑

*j*=1

*j* , което искахме да

**Примери.**

# ⊕1: Ω = {0,1}; 𝒜 = {Ø, Ω, {0}, {1}} = 2Ω

ℙ({0}) := *p*, ℙ({0}) := 1 − *p*, *p* ∈ [0,1 , то е вероятност.

⊕2 Дискретна вероятност:

# Ω = {*ω*1, *ω*2, . . . , *ωN*} ≃ {1, 2, . . . , *N*}

𝒜 = 2Ω, (*p* )*N* : *p* ≥ 0, ∀*i* ≥ 1 и

*N*

*p* = 1.

*i i*=1 *i*

∑ *i i*=1

∀*A* ⊆ Ω, ℙ(*A*) := ∑ *pi*

*i*∈ *A*

ℙ : 𝒜 → [0,1 е вероятност

*A* = {1, 3, 5 , ℙ(*A*) = *p*1 + *p*3 + *p*5.

*N*

Проверка: По дефиниция ℙ(Ω) = ∑ *pi* = ∑ *pi* = 1

*i*∈Ω *i*=1

*N*

Ако *A* ⊆ Ω, то ℙ(*Ac*) = ∑ *pi* = ∑ *pi* = ∑ *pi* − ∑ *pi* = 1 − ℙ(*A*) .

*i*∈ *Ac*

*i*∉ *A*

*i*=1

*i*∈ *A*

Нека *A*1, . . . , *Ak* са непресичащи се събития:

1

2 3

4

*Ak Ai Aj AN*

*k*

ℙ *A* =

*k*

*p* = *p* =

*i* принадлежи на тoчно

*k*

= ℙ(*A* )

(⋃ *j*) *j*=1

*i*

*j*=1 *Aj*

*i*∈⋃

∑

*k*

∑ ∑ *i j*=1 *i*∈ *Aj*

( едно от събитията )

∑ *j* .

*j*=1

# ⊕3 Ω = {1,2,...,*N*

Ако дефинираме *p* = 1 , 1 ≤ *i* ≤ *N*, то ℙ(*A*) = ∑ 1

*i*

= | *A* |

се нарича

*N i*∈ *A N N*

равномерна вероятност! Това означава, че всяко едно от елементарните събития има равен шанс да се сбъдне.

# ⊕ 4 Ω = {1, 2, . . . , *N*

*A* = {*i* ≤ *N* : *i* е четно

*Ac* = {*i* ≤ *N* : *i* е нечетно

ℙ(*A*) = | *A* | = *p*

*N* − | *A* | *N*

ℙ( *c NA* )=

# = 1 − *p*

Ω = {0, 1 , 𝒜 = (Ω, Ø, *A*, *Ac*) ⊆ 2Ω

⊕5 Дискретни вероятности

# Ω = {*ω*1, *ω*2, . . . } ≃ {1, 2, . . . }

𝒜 = 2Ω ∞

Дадена е редица ( *pi*)∞

*i*=1

: *pi* ≥ 0, ∀*i* ≥ 1 и ∑ *pi* = 1.

*i*=1

Ако *A* ⊆ 𝒜, ℙ(*A*) := ∑ *pi*, то ℙ : 𝒜 → [0,1

*i*∈ *A*

задава вероятност.

# ⊕6

*pi* =

# *c*Ω = {1, 2, . . .

*i*2 , *i* ≥ 1

# ℙ(*A*) =

*p* = *c*

1 ; *c* ∞ 1

= 1 ⇔ *c* = 6

∞ 1

= *π*2

∑ *i*

*i*∈ *A*

∑ 2

*i*∈ *A*

∑ 2

*i*=1

2 , тъй като ∑ 2 .

*i*=1

Следователно само за *c* 6 ще може да дефинираме вероятност.

*i*

*i*

*π i*

=

6

*π*2

# ⊕7 Ω = {0, 1, . . .

*pi* = *qpi*, *i* ≥ 0, *p* + *q* =

, *p* ∈ (0,1).

∞

# ∑

*i*=0

*qpi* = *q*

# 1 − *p*

= 1 (геометрична прогресия и дефиниране на геометрично

рзпределение)

# ⊕8 Ω = {1, 2, . . .

*pi* = *pj* за всяко *i*, *j*.

тук не може да дефинираме равномерно разпределение, т.е.